**Министерство науки и высшего образования РФ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**

**«Уфимский университет науки и технологии»**

**Кафедра** Высокопроизводительных вычислительных технологий и систем

**Дисциплина:** Математическое моделирование

Лабораторная работа №2

**Тема:** “Моделирование динамики популяции”

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Группа ПМ-455 | ФИО | Подпись | Дата | Оценка |
| Студент | Акмурзин М.Э. |  |  |  |
| Преподаватель | Лукащук С.Ю. |  |  |  |

Уфа 2024

**Цель работы**: получить навык численно-аналитического исследования математических моделей биологии, описывающих динамику популяций.

**Задание на лабораторную работу**

**I**. Рассматривается обобщённая логистическая модель, описывающая динамику распространения коронавируса:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.1) |

1. Построить аналитическое решение уравнения (1.1).
2. Найти стационарные точки уравнения (1.1) и выполнить анализ их устойчивости в зависимости от исходных данных задачи. Построить графики соответствующих решений.
3. Выполнить конечно-разностную дискретизацию уравнения (1.1) по схеме Эйлера и показать, что она сводится к обобщённому логистическому отображению

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.2) |

1. Определить первые четыре (с учётом циклов удвоения) стационарные точки (1.2) и выполнить анализ их устойчивости.
2. Построить бифуркационную диаграмму отображения (1.2) и численно определить первые шесть точек бифуркации. По найденным значениям рассчитать приближения к числу Фейгенбаума

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

где – бифуркационные значения параметра для -го цикла удвоения.

1. Найти значения параметра r при которых происходит расщепление решения на три ветви (трифуркация).

**II.** Рассмотреть обобщенную модель взаимодействия двух популяций типа хищник-жертва:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1.3) |

где – размер популяции «жертв», – размер популяции «хищников». Вид функций определяется индивидуально в зависимости от номера варианта.

Для модели (1.3) со значениями функций, соответствующих индивидуальному заданию, выполнить следующее:

1. дать биологическую интерпретацию модели;
2. выполнить обезразмеривание модели с целью уменьшения количества значимых коэффициентов;
3. численно-аналитически найти стационарные точки модели и определить их тип;
4. исследовать найденные стационарные точки на устойчивость;
5. построить в окрестности каждой стационарной точки фазовый портрет.

**Практическая часть**

**Задание 1.**

Значения параметров:

Обобщенная логистическая модель:

Сформулируем задачу Коши:

Согласно варианту №12, используются следующие данные:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Страна |  |  |  |
| Норвегия | 8900 | 0,6 | 1,6 |

1) Построить аналитическое решение уравнения:

где – начальная численность популяции

2) Найти стационарные точки уравнения и выполнить анализ их устойчивости в зависимости от исходных данных задачи. Построить графики соответствующих решений

Модель имеет две стационарные точки исследуем их на асимптотическую устойчивость. Для этого внесем малое возмущение получим:

– стационарная точка

Разложим в ряд Тейлора уравнение с возмущением в окрестности точки . В близи этой точки всегда можно выделить достаточно малую окрестность, где вклад нелинейных членов пренебрежимо мал, так что можно откинуть члены порядка два и выше. Получим:

*ξ = ξ₀ eᵏᵗ*

*ъъ*

В окрестности :

при , поэтому стационарная точка устойчива при .

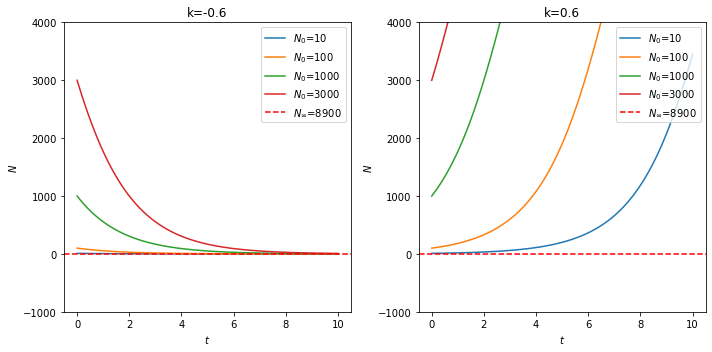


Рисунок 1. Динамика популяции вируса при и различных начальных размерах популяции для точки 0

В окрестности :

при , поэтому стационарная точка устойчива при .

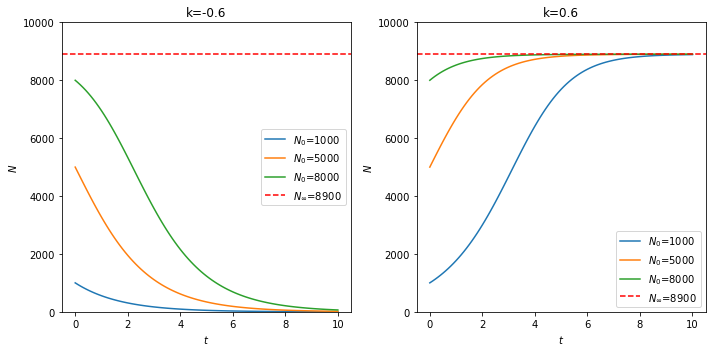


Рисунок 2. Динамика популяции вируса при и различных начальных размерах популяции для точки

3) Выполнить конечно-разностную дискретизацию уравнения по схеме Эйлера и показать, что она сводится к обобщенному логистическому отображению:

Численная схема Эйлера:

Конечно-разностная дискретизация сводится к обобщенному логистическому отображению.

4) Определить аналитически первые четыре стационарные точки обобщенного логистического отображения и выполнить анализ их устойчивости.

Пусть

Для нахождения первых двух стационарных точек необходимо решить уравнение:

Первые две стационарные точки:

Так как логистическое отображение,то .Тогда границы для :

Условие устойчивости стационарных точек ?

Найдем циклы периода два:

Подставив одно уравнение в другое получим следующее уравнение:

После замены :

Произведём замену :

Произведём замену :

Разложим уравнение в ряд Тейлора, предположив, что членами степени 4 и больше (чтобы в итоге стало квадратное уравнение):

Одним из корней уравнения является число , т.е. – найденная ранее стационарная точка. После преобразований:

Решение для :

Соответственно:

5) Построить бифуркационную диаграмму отображения и численно определить первые шесть точек бифуркации. По найденным значениям рассчитать приближения к числу Фейгенбаума

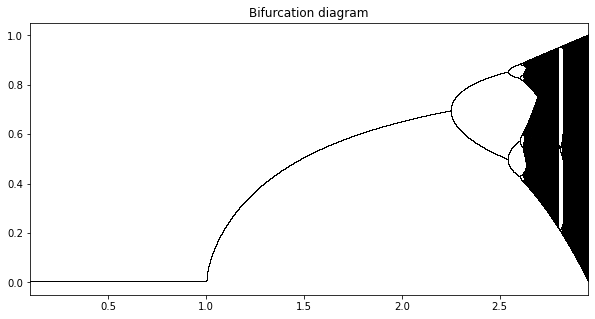


Рисунок 3. Бифуркационная диаграмма

Найденные численно точки бифуркации:

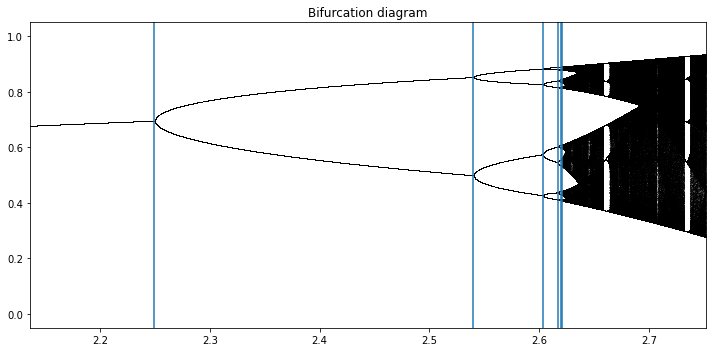
**

Рисунок 4. Первые точки бифуркации, найденные численно

Приближение к числу Фейгенбаума:

6) Найти значения параметра r при которых происходит расщепление решения на три ветви (трифуркация)

Тройной цикл находится в интервале (2.7,2.9):

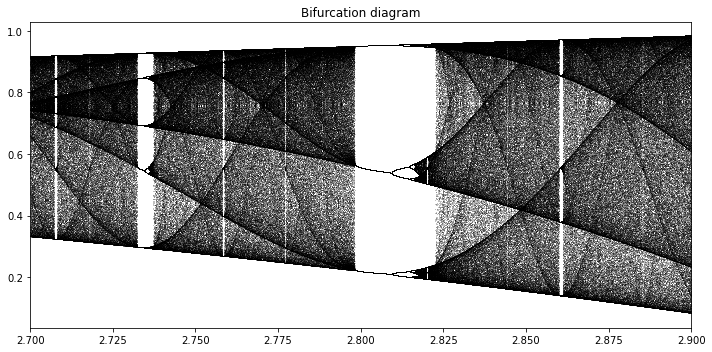


Рисунок 5. Бифуркационная диаграмма для r

Трицикл находится в промежутке :

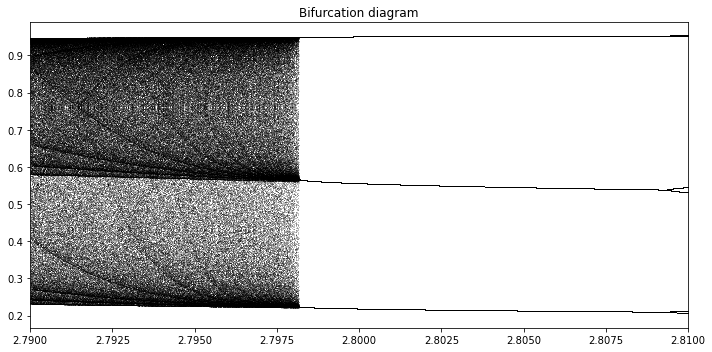


Рисунок 6. Бифуркационная диаграмма для r

Численно точка трифуркации равна: *.*

**Задание 2:**

1) Дать биологическую интерпретацию модели:

– при встрече двух жертв они размножатся с вероятностью .Переменная в знаменателе может отражать то, что если особей станет слишком много, количество размножений уменьшится;

– при встрече хищник-жертва, жертва умрет с долей ;

– чем больше хищников, тем меньше еды им достается;

– при встрече хищник-жертва, хищник поест с долей .

2) Выполнить обезразмеривание модели с целью уменьшения количества значимых коэффициентов:

Пусть , тогда система примет вид:

Если :

Модель зависит от двух параметров .

3) Численно-аналитически найти стационарные точки модели и определить их тип:

Стационарные точки: .

4) Исследовать найденные стационарные точки на устойчивость:

Рассмотрим окрестность точек , тогда после подстановки в систему и разложение в ряд Тейлора до линейной компоненты:

1. : :

Собственные числа: .

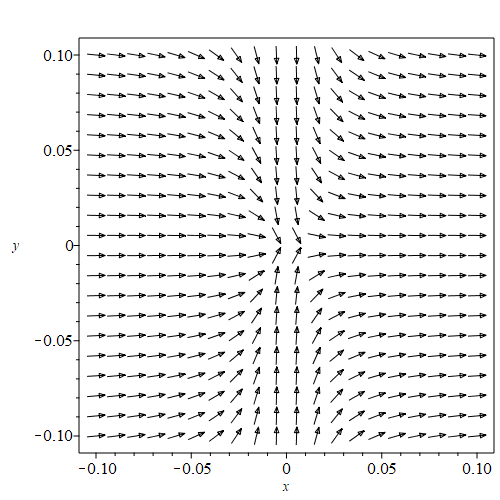
**

Рисунок 7. Фазовый портрет в окрестности (0;0)

1. :

– положительные

b.1)

Неустойчивый узел:

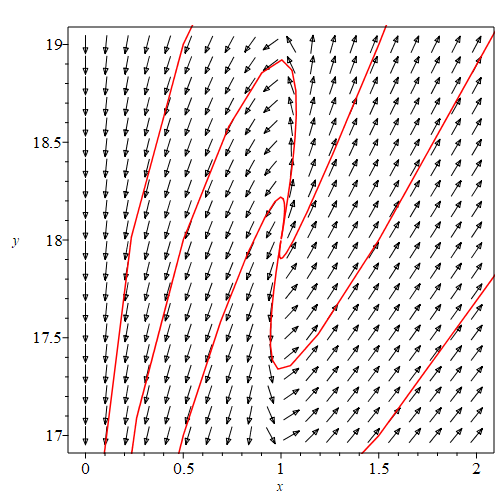


Рисунок 8. Фазовый портрет в окрестности неустойчивого узла (1;18) при a=36, b=1

b.2)

Неустойчивый фокус:

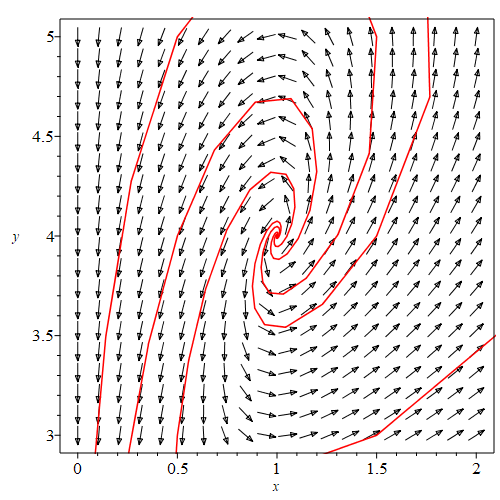


Рисунок 9. Фазовый портрет в окрестности неустойчивого фокуса (1;4) при a=8, b=1

b.3)

Неустойчивый узел:

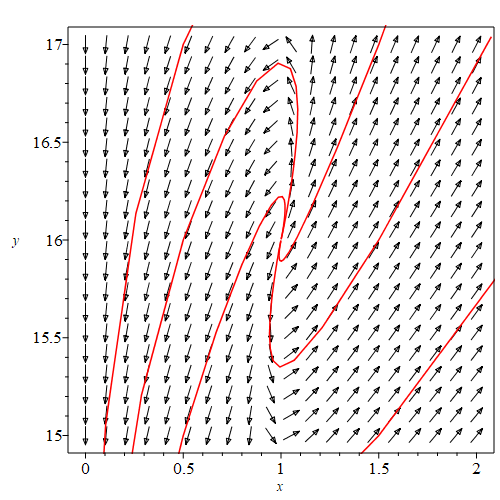


Рисунок 10. Фазовый портрет в окрестности неустойчивого узла (1;16) при a=32, b=1

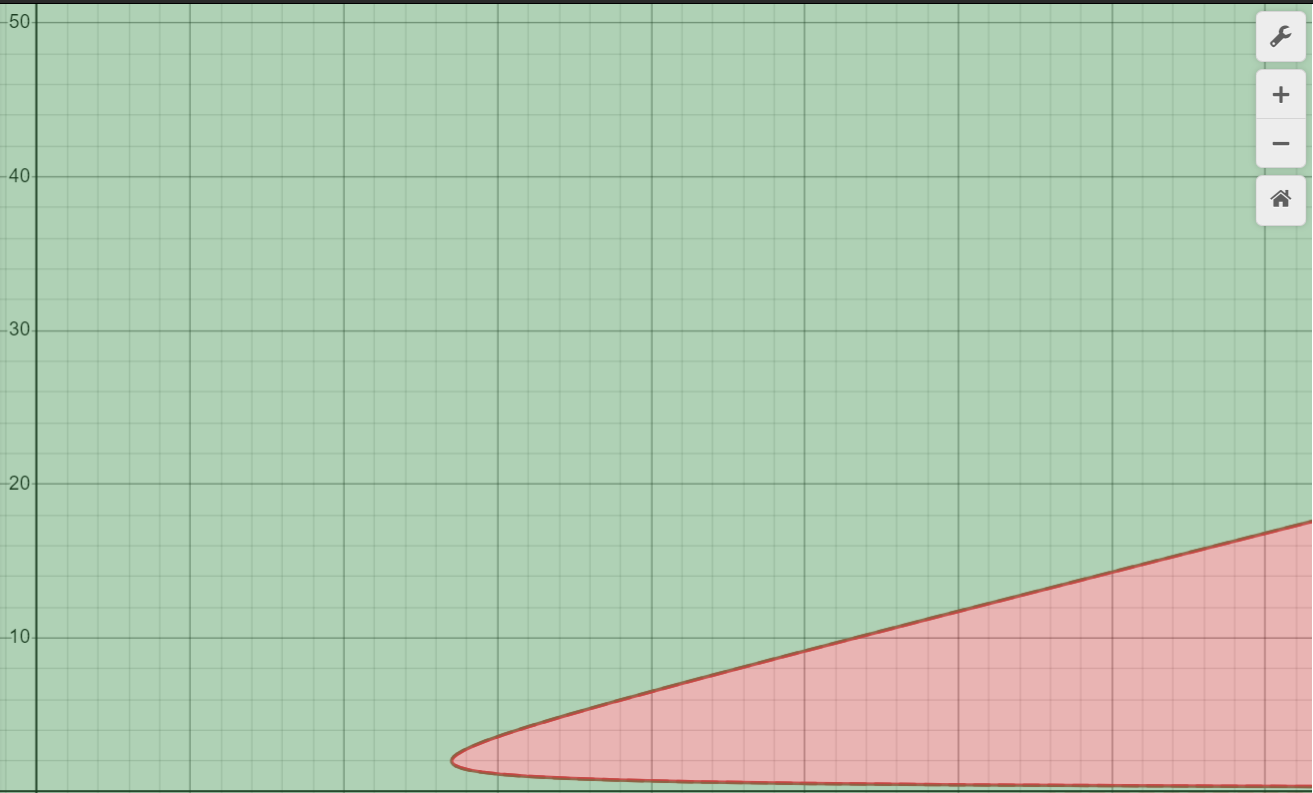


Рисунок 11. График в системе координат b, a. Зеленая область - неустойчивый фокуc , красная область - неустойчивый узел

**Вывод:** В ходе выполнения лабораторной работы были достигнуты следующие результаты: В задании 1, была исследована обобщенная логистическую модель, определили стационарные точки, проведён анализ их устойчивости и выявили точки бифуркации; в задании 2 была рассмотрена модель взаимодействия «хищник-жертва», дана ей биологическую интерпретацию и проведён анализ стационарных точек, построены их фазовые портреты